



Você já sabe contar? Então vamos calcular a área da Colômbia! Uma proposta para abordar cálculo de áreas irregulares na Educação Básica.

Jesuz, Danilo Augusto Ferreira de¹, Pereira, Ana Lucia², Lunardi, José Tadeu³, Gabriel, Fabio Antonio⁴

Resumo

Neste trabalho, ao propormos uma abordagem para o cálculo aproximado de áreas irregulares usando o Teorema de Pick, convidamos docentes e discentes a trabalharem conteúdos que vão além daqueles geralmente presentes nos currículos da Educação Básica. Ilustramos essa abordagem com uma atividade envolvendo o cálculo aproximado da área territorial da Colômbia, que envolve, além do Teorema de Pick, os conceitos de proporção e de escala. O Teorema de Pick é fascinante por ter um enunciado simples, o que torna sua aplicação em problemas concretos simples e elegante, embora seu conteúdo não seja muito intuitivo. Essas características, associadas à boa qualidade das aproximações obtidas para áreas irregulares, sugerem que o método possui potencial para estimular docentes e discentes a desenvolverem uma postura crítica e investigativa em relação à matemática.

Palavras chave: Cálculo de áreas, Teorema de Pick, Ensino de Matemática.

Categoria 1: Reflexiones y/o experiencias desde la innovación en el aula.

Introdução

A Matemática está presente em várias situações da vida cotidiana, e um exemplo é o cálculo de áreas. Nesse sentido, um conhecimento sólido da geometria pode auxiliar na resolução de problemas concretos, como, por exemplo, estimar quantas pessoas cabem em um ambiente destinado a um show que se está organizando, ou calcular a quantidade de lajotas que são necessárias para cobrir o entorno de uma piscina, ou determinar qual é o melhor

¹Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). danilo.jesuz@ifpr.edu.br

² Estadual de Ponta Grossa (UEPG). anabaccon@uepg.br

³ Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). jttlunardi@uepg.br

⁴ Universidade Estadual de Ponta Grossa, bolsista de doutorado Capes/Fundação Araucária. fabioantoniogabriel@gmail.com



formato para construir um galpão, de forma a obter o maior espaço possível, dentre outras situações possíveis.

Entendemos que o aluno somente desenvolverá autonomia para pensar em estratégias para resolver problemas concretos se o ensino da matemática for além das propostas curriculares tradicionais e estimular uma postura investigativa, típica da pesquisa científica. Observamos que muitas vezes o ensino da geometria é feito de forma descontextualizada, estimulando abordagens mecânicas e “engessadas”, inadequadas para o desenvolvimento do verdadeiro pensamento matemático. Nessa linha, entendemos que a Matemática, em particular a geometria, por vezes considerada difícil ou demasiado abstrata, precisa estar próxima do estudante, para que se revele significativa e estimule-o a compreendê-la como um corpo de conhecimentos importantes, não somente para o desenvolvimento profissional, mas também para o exercício da cidadania em um sentido mais amplo.

Neste trabalho apresentamos um recorte adaptado da pesquisa de mestrado de um dos autores, que tem por objetivo a discussão do cálculo de áreas de regiões planas e irregulares na Educação Básica. Especificamente, propomos uma atividade para ser desenvolvida em sala de aula cujo objetivo é o cálculo da área de uma região plana qualquer, usando aproximação poligonal para a fronteira da região dada e, após, calculando a área dessa região por meio do Teorema de Pick. Esse método é aplicado no problema concreto de se determinar aproximadamente a área territorial da Colômbia.

A proposta aqui apresentada possui caráter inovativo, no sentido que estimula o estudante e os docentes da educação básica a irem além do cálculo de regiões como quadriláteros notáveis, triângulos e polígonos regulares (Jesus, 2015). Nesse sentido, contribui para estimular o pensamento matemático investigativo e criativo na busca por soluções de um problema concreto.

1 O Teorema de Pick

George Alexander Pick publicou em 1876, um ano após o seu ingresso na Universidade de Viena, o primeiro de seus 67 artigos no campo da Matemática. Desenvolveu trabalhos diversas áreas, tais como Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculo Integral e Geometria. Publicou, em 1899, o trabalho de oito páginas intitulado *Teorema de Pick*. O trabalho ganhou destaque e chamou a atenção por sua simplicidade e elegância, aliada à sua grande utilidade ao ser empregado em determinadas situações. (Hermes, 2014; Lima, 2006).

Para enunciar o Teorema de Pick, primeiramente precisamos definir os conceitos de *polígono simples* e de *rede no plano*. Dizemos que um polígono é



simples se “a interseção de um par de arestas não consecutivas é sempre vazia, (um par de arestas consecutivas é determinado por cada conjunto de três vértices consecutivos)” (Pereira e Melo, 2012, p.36).

Uma *rede no plano* “é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal e vertical é igual a 1”. (Lima, 2006, p. 102). Adotando o sistema de coordenadas cartesianas na forma convencional, definimos a rede como o conjunto de todos os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas são números inteiros (Lima, 2006). O Teorema de Pick é enunciado como segue:

Teorema de Pick: Consideremos um polígono **P** simples, cujos vértices são pontos de uma rede. Denotemos por **I** a quantidade de pontos da rede que são interiores ao polígono e por **B** a quantidade de pontos que pertencem às arestas desse polígono, incluindo os vértices. A área desse polígono, que representaremos por Área (P), pode ser calculada por:

$$\text{ÁREA (P)} = I + \frac{B}{2} - 1 .$$

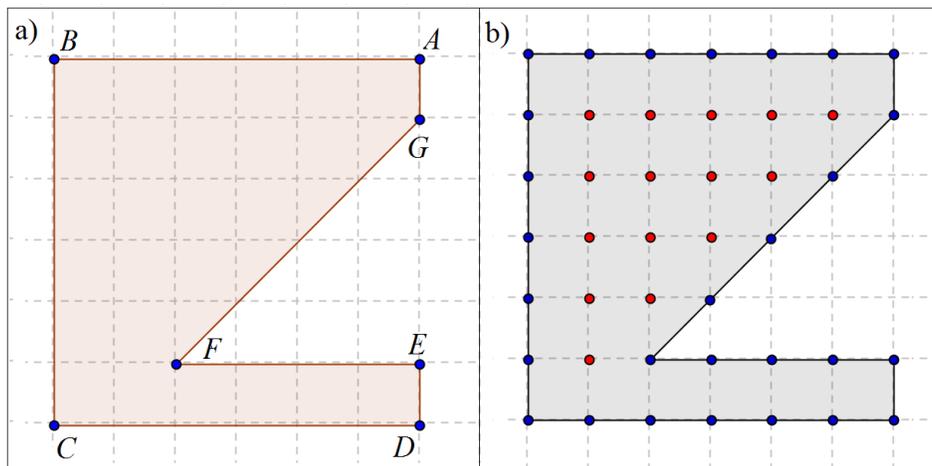
A elegância e a simplicidade do Teorema de Pick tornam adequada sua abordagem na Educação Básica, mesmo que não faça parte dos conteúdos curriculares tradicionais. Embora o Teorema possa ser provado por indução, não propomos aqui que se apresente tal demonstração como parte da atividade em sala de aula, pois a atividade proposta objetiva a ilustração do uso do Teorema em uma situação concreta, que resulta ser muito simples.

2 Proposta para Abordagem e Aplicação do Teorema de Pick

Após a apresentação do Teorema de Pick, no primeiro momento solicitamos aos alunos que o utilizem no cálculo a área da figura 1, para que se familiarizem com o seu enunciado. A seguir apresentamos uma solução para esse exercício, para auxiliar o planejamento docente. Utilizamos a figura 1 b) para calcular área do polígono representado na Figura 1 a).

2.1 Conhecendo e aplicando o Teorema de Pick

Figura 1: a) Área a ser calculada pelo Teorema de Pick e b) Pontos da rede internos ao polígono e na fronteira.



Fonte: Jesuz, 2015, p. 56

- São 15 os pontos da rede que ficaram internos ao polígono (vermelhos). Logo, $I = 15$;
- São 28 os pontos que ficaram sobre as arestas, incluindo os vértices (azuis). Portanto, $B=28$;
- Pelo Teorema de Pick a área da figura é dada por:

$$\text{ÁREA}(P) = I + \frac{B}{2} - 1 = 15 + \frac{28}{2} - 1 = 28 \text{ u. a.}$$

Durante o encaminhamento dessa etapa podemos solicitar aos alunos que calculem a área do polígono por um método que já conheçam (somando as áreas dos quadrados e triângulos que formam a figura, por exemplo) e que, posteriormente, utilizem o Teorema de Pick para verificar que realmente os resultados são iguais. O docente poderá trazer outros polígonos para que o aluno familiarize-se com o método, caso julgue necessário, de maneira a subsidiar o desenvolvimento da próxima tarefa.

2.2 Calculando a área aproximada da Colômbia, por meio do Teorema de Pick.

Para a realização dessa etapa são necessários os materiais:

- Carbono para tecido (ou carbono para papel);
- Pontos no reticulado com espaçamento de 1 cm, 0,5 cm e 0,3 cm;
- Computador com acesso à internet para pesquisa no Google Maps;
- Editor de Figuras.

Apresentamos a proposta descrita nos passos a seguir:

1º Passo: Pesquisar, no Google Maps, o mapa da região a ser calculada e captar a imagem, conforme apresentamos na figura 2, por meio da função *Print Screen* do computador. Após transferir a imagem para o editor de figuras à escolha.

Figura 2: Mapa da Colômbia



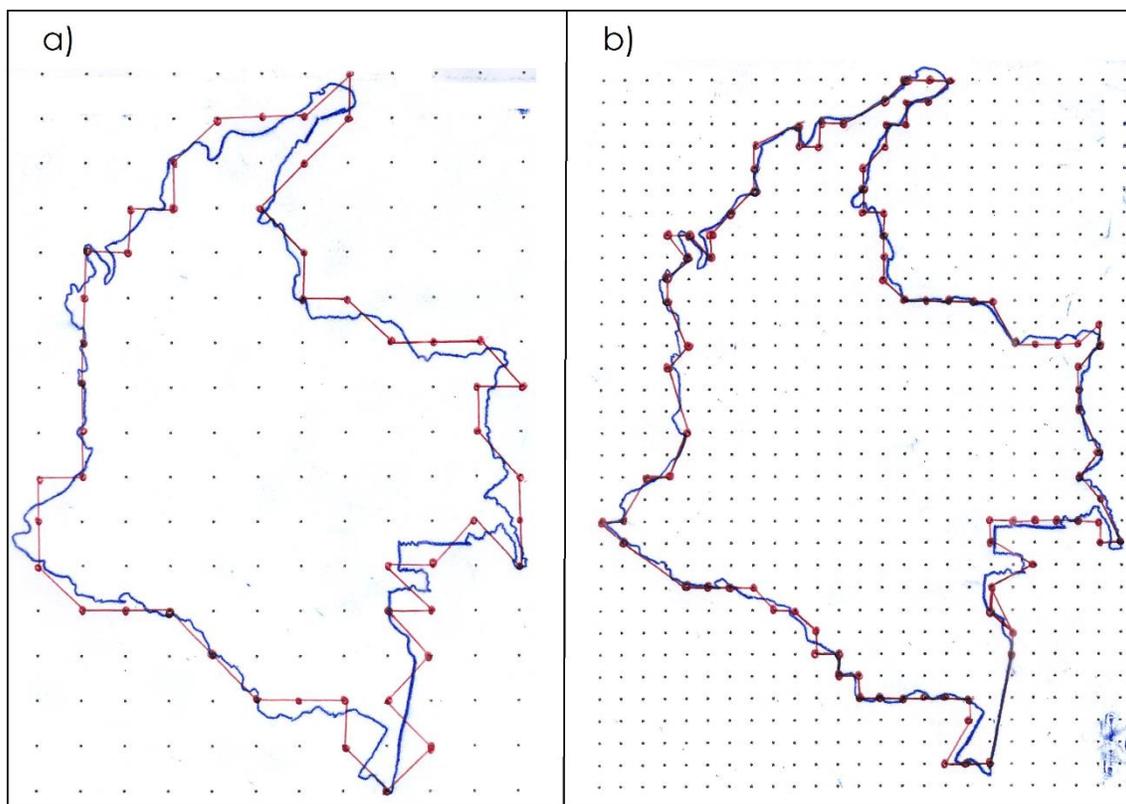
Fonte: Google Maps

Uma informação importante do mapa, além das fronteiras do país, é a escala, destacada no canto inferior direito da figura, que será fundamental para a conversão das áreas obtidas para as unidades usuais (Km^2). O professor pode pedir que os alunos realizem a pesquisa e retirem do *site* as informações necessárias. Alternativamente, pode trazer a imagem já impressa e adequada para que cada estudante calcule a área.

2º Passo: Após a obtenção da imagem devemos fazer a impressão do mapa e, utilizando o carbono, transferir a imagem para a malha quadriculada.

3º Passo: A partir do contorno obtido na figura 3, o estudante deve construir um polígono que seja o mais próximo possível da fronteira da figura obtida, utilizando como vértices apenas os pontos da rede. Durante essa construção o estudante deve decidir, em cada momento, qual ponto escolher, sempre buscando a maior aproximação possível, ora por falta, ora por excesso, para que as faltas e excessos se compensem da melhor maneira possível. A figura 3 sugere a realização do 2º e 3º passos.

Figura 3: Aproximação da região por polígonos: a) rede de 1 cm; b) rede de 0,5 cm



Fonte: Autores

Na Figura 3 observamos o contorno do mapa (em azul) e a aproximação por polígonos (em vermelho). Na figura 3a percebemos que a aproximação não foi tão boa, se comparado à figura 3b onde podemos observar que muitas regiões do polígono acabam coincidindo com a região original, devido à maior proximidade dos pontos da rede.

4º passo: Após a obtenção do polígono podemos calcular a área da figura 3, utilizando o Teorema de Pick, conforme ilustrado na figura 4.



Figura 4: Cálculo das áreas dos polígonos das figuras 3a e 3b

Área do Polígono da Figura 3 a) - Malha de 1 cm	Área do Polígono da Figura 3 b) - Malha de 0,5 cm
<p>B: Número de pontos da rede que ficaram sobre o polígono (incluindo os vértices): 49</p> <p>I: Número de pontos da rede, internos ao polígono: 66</p> <ul style="list-style-type: none"> Cálculo da área do polígono da figura 3 a) $\text{ÁREA}(P_a) = I + \frac{B}{2} - 1 = 66 + \frac{49}{2} - 1 = 89,5 \text{ cm}^2$	<p>B: Número de pontos da rede que ficaram sobre o polígono (incluindo os vértices): 92</p> <p>I: Número de pontos da rede, internos ao polígono: 299</p> <ul style="list-style-type: none"> Cálculo da área do polígono da figura 3 b) $\text{ÁREA}(P_b) = I + \frac{B}{2} - 1 = 299 + \frac{92}{2} - 1 = 344 \text{ u. a.}$ <p>Como a malha tem os pontos da rede com distância 0,5 cm, fazemos:</p> $\text{ÁREA}(P_b) = 344 \cdot (0,5)^2 = 86 \text{ cm}^2$

Fonte: Autores

5º passo: Para obter a área do país, aproximada pelas áreas dos polígonos dadas na figura 4 podemos considerar a propriedade: “a razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança” (Dolce e Pompeo, 2011, p.340).

A razão de semelhança pode ser obtida por meio da escala informada no mapa (figura 2). Medindo com uma régua o segmento referente à escala, determinamos (neste caso específico) que a razão de semelhança é 200 km/1,7 cm. A figura 5 apresenta os cálculos finais da área aproximada.

Figura 5: Cálculo da área da Colômbia – aproximação pelos polígonos

Área da Colômbia – aproximação pela Figura 3 a) -	Área da Colômbia – aproximação pela Figura 3 b)
<p>ÁREA (Col): Área da Colômbia</p> <p>K: Razão de semelhança (Escala do mapa)</p> <p>K = 200 km/ 1,7 cm</p> <ul style="list-style-type: none"> Cálculo da área $\frac{\text{ÁREA}(Col)}{\text{ÁREA}(P_a)} = \left(\frac{200}{1,7}\right)^2$ $\frac{\text{ÁREA}(Col)}{89,5} = \left(\frac{200}{1,7}\right)^2$ $\text{ÁREA}(Col) = 1.238.754 \text{ km}^2$	<p>ÁREA (Col): Área da Colômbia</p> <p>K: Razão de semelhança (Escala do mapa)</p> <p>K = 200 km/ 1,7 cm</p> <ul style="list-style-type: none"> Cálculo da área $\frac{\text{ÁREA}(Col)}{\text{ÁREA}(P_b)} = \left(\frac{200}{1,7}\right)^2$ $\frac{\text{ÁREA}(Col)}{86} = \left(\frac{200}{1,7}\right)^2$ $\text{ÁREA}(Col) = 1.190.311 \text{ km}^2$

Fonte: Autores

Por meio de um processo simples, e utilizando poucos recursos, encontramos a área de 1.190.311 Km² (na melhor aproximação, da figura 3b). Segundo o site do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), a área oficial da Colômbia é de 1.141.750 km². Nesse caso obtivemos uma aproximação razoável, com um erro de 4,25%, que podemos considerar pequeno no contexto da atividade. Se docentes e discentes desejarem obter aproximações melhores,



basta utilizarem redes com menores distâncias entre os pontos; no entanto, o ganho em precisão vem com o custo da maior dificuldade em contar os pontos.

Considerações Finais

Nesse trabalho apresentamos uma proposta de atividade em sala de aula que permite o cálculo aproximado de áreas de figuras planas, utilizando o Teorema de Pick.

A atividade proposta trabalha o conceito geométrico de área por meio de uma atividade prática e usando o Teorema de Pick, indo além dos conteúdos curriculares tradicionais da educação básica. A atividade também trabalha com os conceitos matemáticos de proporção e escala, e possui potencial para explorar interações com outras disciplinas, como geografia (mapas, áreas territoriais, densidades demográficas, desigualdades regionais, etc...) e uso de recursos da internet (Google Maps, uso de sites de informações estatísticas, etc...) e de computação (edição e impressão de arquivos de imagens).

Como sugestão de variações do uso da atividade, o docente poderia desenvolver um trabalho interdisciplinar, na área de meio ambiente, pedindo para que os alunos utilizem o *Google Earth* para calcular a área de uma região desmatada desenvolvendo a sensibilidade dos alunos para os problemas que o homem tem causado ao meio ambiente.

Finalmente, ao estimular docentes e alunos da educação básica a buscarem conhecimentos extracurriculares e de outras disciplinas na resolução de um problema prático, a presente proposta de atividade em sala de aula busca contribuir para uma abordagem mais crítica, investigativa e interdisciplinar no ensino da matemática.

Referências Bibliográficas

DOLCE, O., POMPEO, J. N. (2011). *Fundamentos da Matemática Elementar 9: Geometria Plana.* 8 Ed. São Paulo: Atual.

HERMES, J. D. V. (2014). *O Teorema de Pick.* Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT) Universidade Federal São João del Rei – UFSJ. São João del Rei, 16 f.

JESUZ, D. A. F. (2015). *Desenvolvendo o conceito de áreas: uma proposta didática para abordar regiões planas irregulares na Educação Básica.* 2015. 122 f.



Revista Tecné, Episteme y Didaxis. Año 2018. Numero **Extraordinario.** ISSN **impreso:** 0121-3814, **ISSN web:** 2323-0126 **Memorias,** Octavo Congreso Internacional de formación de Profesores de Ciencias para la Construcción de Sociedades Sustentables. Octubre 10, 11 Y 12 de 2018, Bogotá

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

LIMA, E. L. (2006). *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. 5 ed. Rio de Janeiro: SBM.

PEREIRA, A. L. MELO, S. T. (2012). *Contando Áreas – o Teorema de Pick*. RPM - Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n.78, p. 36-42, 2º quadrimestre.

Sites Consultados

Google Maps. Disponível em:
<https://www.google.com.br/maps/place/Col%C3%B4mbia/@3.6667698,-79.4797187,5z/data=!4m5!3m4!1s0x8e15a43aae1594a3:0x9a0d9a04eff2a340!8m2!3d4.570868!4d-74.297333>. Acesso em: 12 mar. 2018.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA – IBGE. Disponível em:
<https://pais.ibge.gov.br/#/pt/pais/colombia/info/sintese>. Acesso em: 12 mar. 2018.